



# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

FORONOMIA





# Schema di fluido ideale

- Moto stazionario, fluido viscoso ( $\mu \neq 0 \Rightarrow \nu \neq 0$ )

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s$$

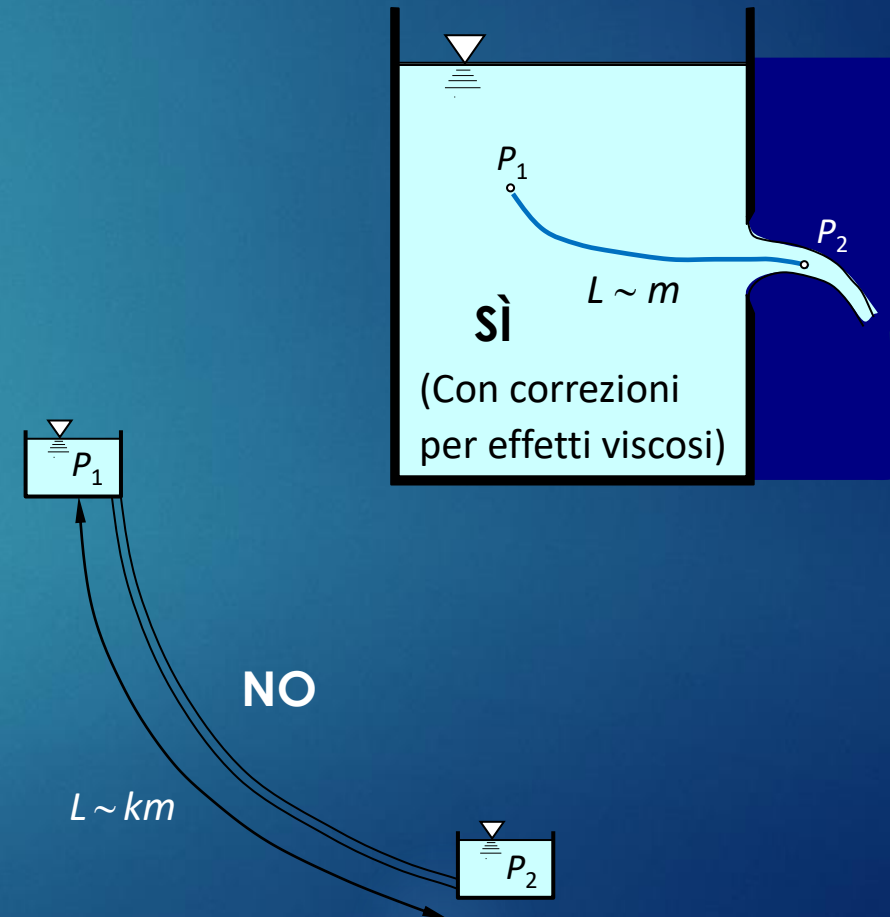
- Variazione di  $H$  lungo un percorso fra i punti 1 e 2

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s \longrightarrow \int_1^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = H_2 - H_1 = \int_1^2 \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s ds$$

- Se il percorso è abbastanza breve, l'integrale del termine viscoso è trascurabile; si ha quindi:

$$H_2 - H_1 \cong 0 \longrightarrow H_2 \cong H_1 \longrightarrow H \cong \text{cost}$$

- ✓ può essere applicato lo schema di fluido ideale
- applicabilità schema di fluido ideale dipende da:
  - Lunghezza del percorso
  - caratteristiche del campo di moto ( $\nabla^2 \vec{u}$ )
  - caratteristiche del fluido ( $\nu$ )



# Luce di fondo in parete sottile

► Luci in parete sottile

- Aperture con bordi affilati per favorire il distacco netto della vena

► Luce di fondo in parete sottile – analisi processo di efflusso

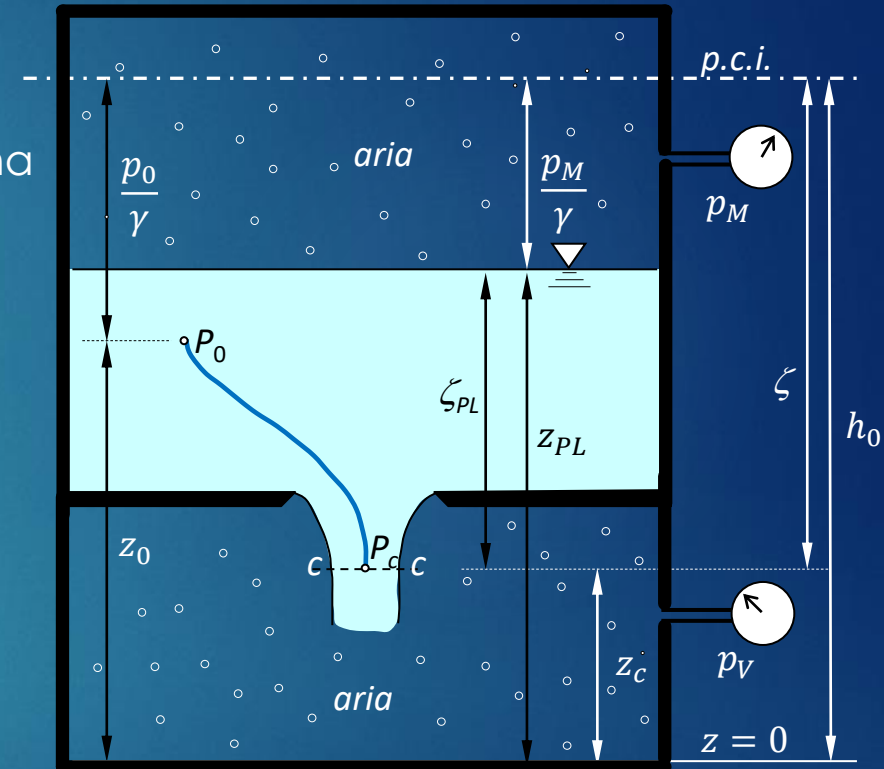
- A valle della luce la vena si contrae
- *Sezione contratta* c-c: prima sezione regolare (piana, velocità normali punto per punto,  $h=\text{cost}$ ) a valle della luce
- Legge di Bernoulli fra punto interno a serbatoio e sezione c-c

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_0^2}{2g} \cong 0 \\ z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = h_o \cong \text{cost} \end{array} \right.$$

- $h_o = z_{PL} + \frac{p_M}{\gamma}$  ;  $p_c = \text{cost} = p_{aria} = p_V$

$$u_c = \sqrt{2g \left( h_0 - z_c - \frac{p_c}{\gamma} \right)} = \sqrt{2g \left( \zeta - \frac{p_c}{\gamma} \right)} = \sqrt{2g \left( \zeta_{PL} + \frac{p_M}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} \right)}$$

- ✓  $\zeta$  = carico su luce ;  $u_c$  cresce con  $p_M$ , decresce a  $p_c$  crescente



- Pelo libero e sbocco in atmosfera

- $p_M = p_c = 0$  ;  $\zeta = \zeta_{PL}$

$$u_c = \sqrt{2g\zeta} = u_T \text{ (velocità Torricelliana)}$$

# Luce di fondo in parete sottile

## ► Determinazione della portata

$$u_c = \sqrt{2g \left( h_0 - z_c - \frac{p_c}{\gamma} \right)} = \sqrt{2g \left( \zeta - \frac{p_c}{\gamma} \right)} = \sqrt{2g \left( \zeta_{PL} + \frac{p_M}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} \right)}$$

✓  $u_c$  costante sulla sezione contratta

• Portata effluente

$$Q = \int_{\Omega_c} u_c \, d\Omega = u_c \Omega_c = \sqrt{2g \left( \zeta_{PL} + \frac{p_M}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} \right)} \Omega_c$$

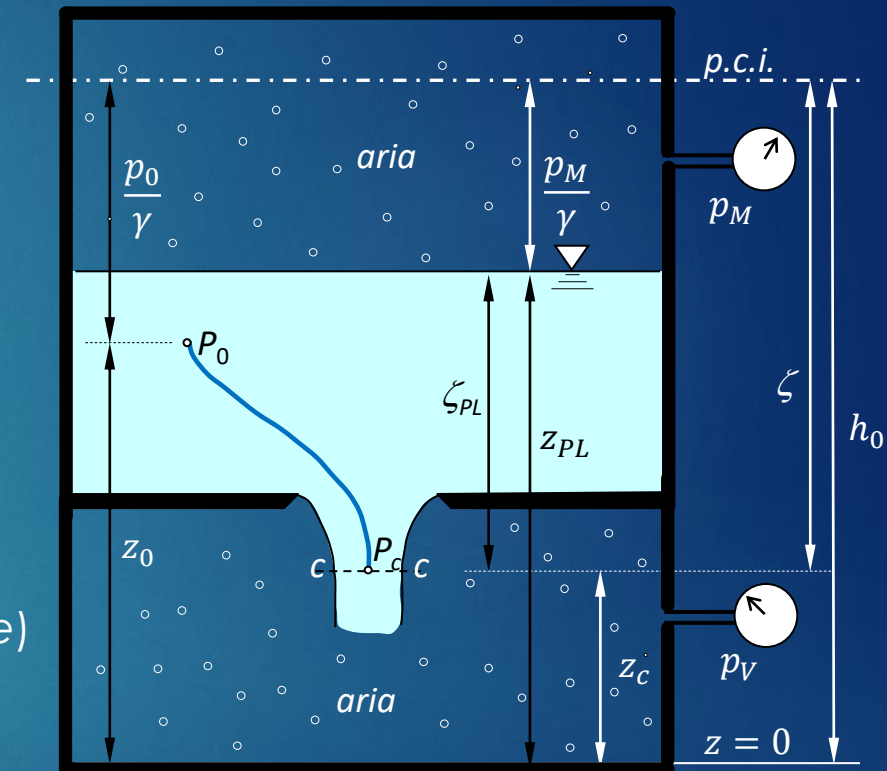
✓  $\Omega_c = \Omega C_c$      $C_c = \Omega_c / \Omega = 0,61$  (coefficiente di contrazione)

✓  $u_c$  per fluido ideale corretta con  $C_v = 0,98$  per fluido reale

$$Q = C_c C_v \sqrt{2g \left( \zeta_{PL} + \frac{p_M}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} \right)} \Omega = \mu \sqrt{2g \left( \zeta_{PL} + \frac{p_M}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} \right)} \Omega$$

✓  $\mu = C_c C_v = 0,6$  (coefficiente di efflusso)

✓  $Q$  cresce al crescere di  $p_M$ , decresce al crescere di  $p_v$



• Pelo libero e sbocco in atmosfera

$$p_M = p_c = 0 ; \zeta = \zeta_{PL}$$

$$Q = \mu \sqrt{2g\zeta} \Omega = \mu u_T \Omega$$





# Luce in parete sottile verticale

## ► Analisi generale del processo di efflusso

- Sezione contratta c-c: prima sezione con  $p=0$  a valle della luce
  - ✓  $h \neq \text{cost}$  su sezione contratta ( $p$  uguali a quote diverse)
- Legge di Bernoulli fra punto interno a serbatoio e sezione c-c

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

$$\begin{cases} P_0 \text{ lontano da luce} \Rightarrow P_0 \approx \text{in quiete:} \\ \frac{u_0^2}{2g} \cong 0 \\ z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = h_0 \cong \text{cost} \end{cases}$$

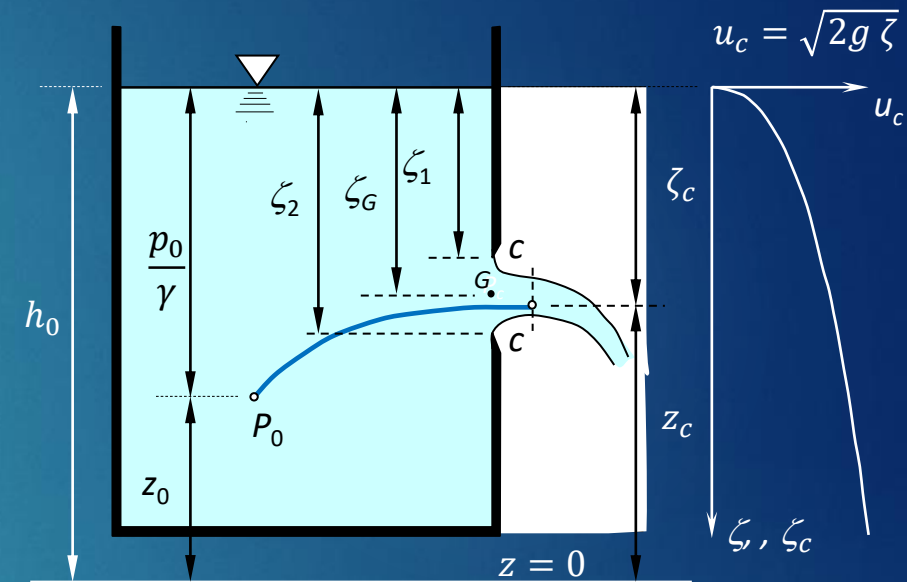
$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - z_c)} = \sqrt{2g \zeta_c}$$

- ✓  $u_c$  variabile sulla sezione contratta

- Portata effluente

$$Q = \int_{\Omega_c} u_c \, d\Omega = \int_{\Omega_c} \sqrt{2g \zeta_c} \, d\Omega$$

- ✓ Necessaria conoscenza distribuzione di  $u_c$  e sezione  $\Omega_c$



- Caso  $\zeta_G \gg D \Rightarrow u_c(\zeta_c) \approx \text{lineare}$

$$Q = C_c C_v \sqrt{2g \zeta_G} \Omega = \mu \sqrt{2g \zeta_G} \Omega$$

$$\checkmark \quad \Omega_c = \Omega C_c ; C_c = \Omega_c / \Omega = 0,61$$

$$\checkmark \quad u_c \rightarrow C_v u_c ; C_v = 0,98 \text{ (fluido reale)}$$

$$\checkmark \quad \mu = C_c C_v = 0,6$$

# Luce in parete sottile verticale

## ► Caso $\zeta_G \sim D$

$$u_c = \sqrt{2g \zeta_c} \quad ; \quad \zeta_c \text{ carico su punti della sezione contratta}$$

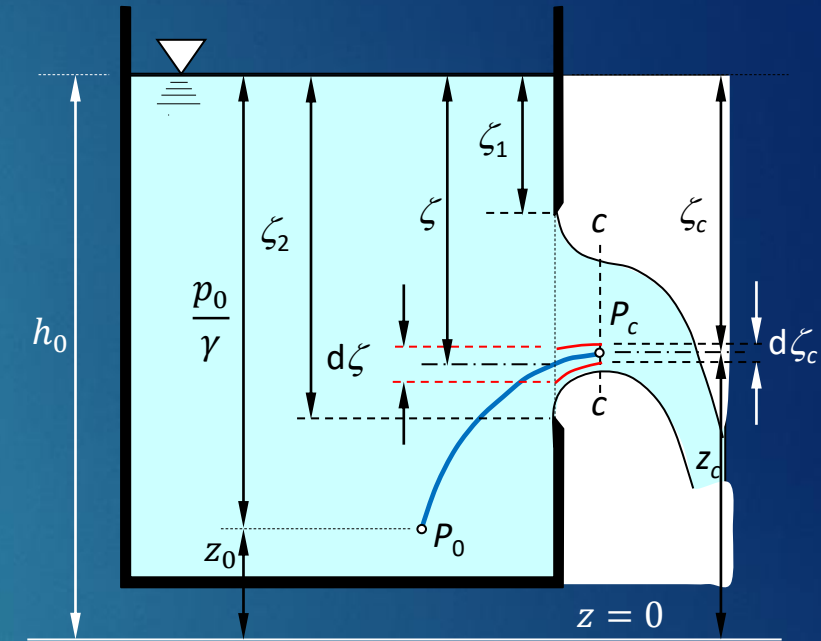
✓  $u_c$  per fluido ideale corretta con  $C_v = 0,98$  per fluido reale

- Sezione rettangolare di larghezza  $b$  = larghezza serbatoio

- moto piano;  $d\Omega_c = b d\zeta_c$
- si pone  $\zeta_c \cong \zeta$  = affondamento sotto p.c.i. particella sulla luce
- si assume  $d\zeta_c = C_c d\zeta$  per ogni tubo di flusso elementare;  $C_c = 0,61$
- $d\Omega_c = b d\zeta_c = b C_c d\zeta$

- Portata effluente

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\Omega_c} C_v \sqrt{2g \zeta_c} d\Omega_c \cong \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} C_v \sqrt{2g \zeta} b C_c d\zeta = b C_c C_v \sqrt{2g} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sqrt{\zeta} d\zeta \\ &= C_c C_v b \sqrt{2g} \frac{2}{3} [\zeta^{3/2}]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \mu b \sqrt{2g} (\zeta_2^{3/2} - \zeta_1^{3/2}) \end{aligned}$$



✓  $\mu = \frac{2}{3} C_c C_v = 0,4$

✓ Formula verificata sperimentalmente

✓  $\zeta_c \cong \zeta$  determina errori in più o in meno che si compensano



# Luce di Venturi

## ► Luce di Venturi: luce con tubo addizionale esterno (corto)

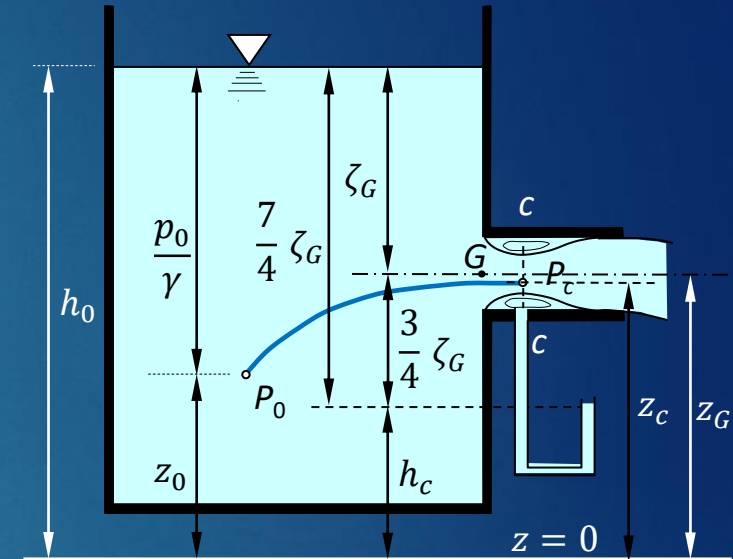
- distacco di vena all'imbocco e riattacco a fine tubo
- sezione contratta c-c intermedia con  $h_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} = \text{cost} = z_G + \frac{p_G}{\gamma}$
- In c-c-depressione:  $\frac{p_G}{\gamma} = \begin{cases} -\frac{3}{4}\zeta_G & \text{per } \frac{3}{4}\zeta_G \leq p_{atm}^*/\gamma \\ -\frac{p_{atm}^*}{\gamma} & \text{per } \frac{3}{4}\zeta_G > p_{atm}^*/\gamma \end{cases}$
- legge di Bernoulli

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g} = z_G + \frac{p_G}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g} \quad \frac{u_0^2}{2g} \cong 0 ; z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = \text{cost} = h_0$$

$$u_c = \sqrt{2g \left( h_0 - z_G - \frac{p_G}{\gamma} \right)} = \sqrt{2g \left( \zeta_G + \frac{3}{4}\zeta_G \right)} = \sqrt{2g \cdot \frac{7}{4}\zeta_G} = \text{cost} \quad \left( \frac{3}{4}\zeta_G \leq \frac{p_{atm}^*}{\gamma} \right)$$

$$Q = \int_{\Omega_c} C_v u_c d\Omega = C_v u_c \Omega_c = \sqrt{\frac{7}{4}} C_v C_c \Omega \sqrt{2g \zeta_G} = \mu_1 \sqrt{2g \zeta_G} \Omega \quad \text{per } \frac{3}{4}\zeta_G \leq \frac{p_{atm}^*}{\gamma}$$

$$Q = \int_{\Omega_c} C_v u_c d\Omega = C_v u_c \Omega_c = \mu_2 \sqrt{2g \left( \zeta_G + \frac{p_{atm}^*}{\gamma} \right)} \Omega \quad \text{per } \frac{3}{4}\zeta_G > \frac{p_{atm}^*}{\gamma}$$



$$\checkmark C_c = 0,61 ; C_v = 0,98$$

$$\checkmark \mu_1 = C_c C_v \sqrt{\frac{7}{4}} = 0,8$$

$$\checkmark \mu_2 = C_c C_v = 0,6$$

$$\checkmark \frac{p_{atm}^*}{\gamma_{acqua}} = 10,33 \text{ m}$$

✓ efflusso da brecce



# Luce di Borda in parete sottile

## ► Luce di Borda: luce con tubo addizionale interno (corto)

- sezione contratta c-c in atmosfera ( $p_c \equiv 0$  ;  $h_c \neq \text{cost}$ )
- legge di Bernoulli fra punto interno a serbatoio e sezione c-c

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g} \quad \frac{u_0^2}{2g} \cong 0 ; \quad z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = \text{cost} = h_0 ; \quad p_c = 0$$

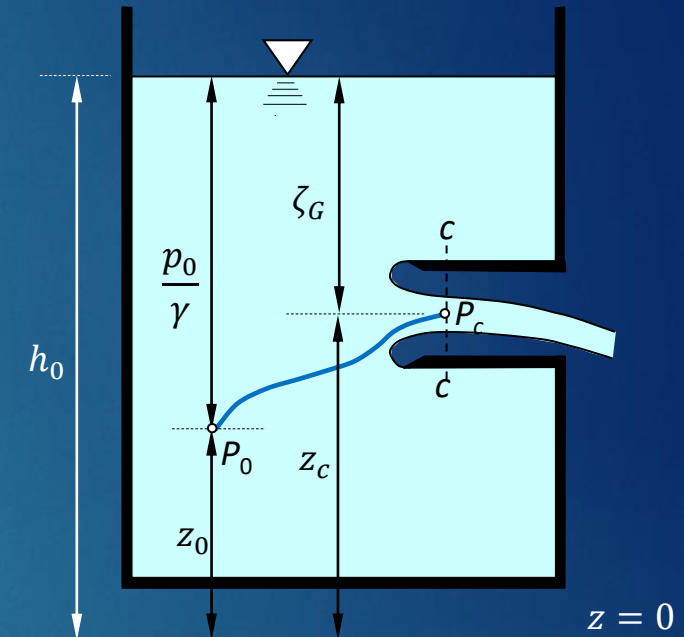
- Ipotesi  $\zeta_G \gg D$

$$u_c \cong \sqrt{2g(h_0 - z_G)} = \sqrt{2g \zeta_G}$$

$$Q = \int_{\Omega_c} C_v u_c d\Omega = C_v u_c \Omega_c = C_v C_c \Omega \sqrt{2g \zeta_G} = \mu \sqrt{2g \zeta_G} \Omega$$

## ► Coefficiente di contrazione

- Dipende dalla massima deviazione delle traiettorie fino alla sezione contratta
  - $\Delta \alpha = 90^\circ$        $C_c = 0,61$       (luci di fondo, in parete verticale, Venturi)
  - $\Delta \alpha = 180^\circ$        $C_c = 0,5$       (luce di Borda)



✓  $C_v = 0,98$

✓  $C_c = 0,5$

✓  $\mu = C_c C_v \cong 0,5$

✓ Si dimostra che  $C_c = 0,5$  è il minimo valore possibile



# Luce rigurgitata in parete sottile

► Luce rigurgitata: sezione contratta sotto battente

- sezione contratta c-c regolare:  $h_c = \text{cost} = h_B$
- legge di Bernoulli fra punto interno a serbatoio e sezione c-c

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

$$\frac{u_0^2}{2g} \cong 0 ; z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = \text{cost} = h_0 = h_A ; z_c + \frac{p_c}{\gamma} = \text{cost} = h_B$$

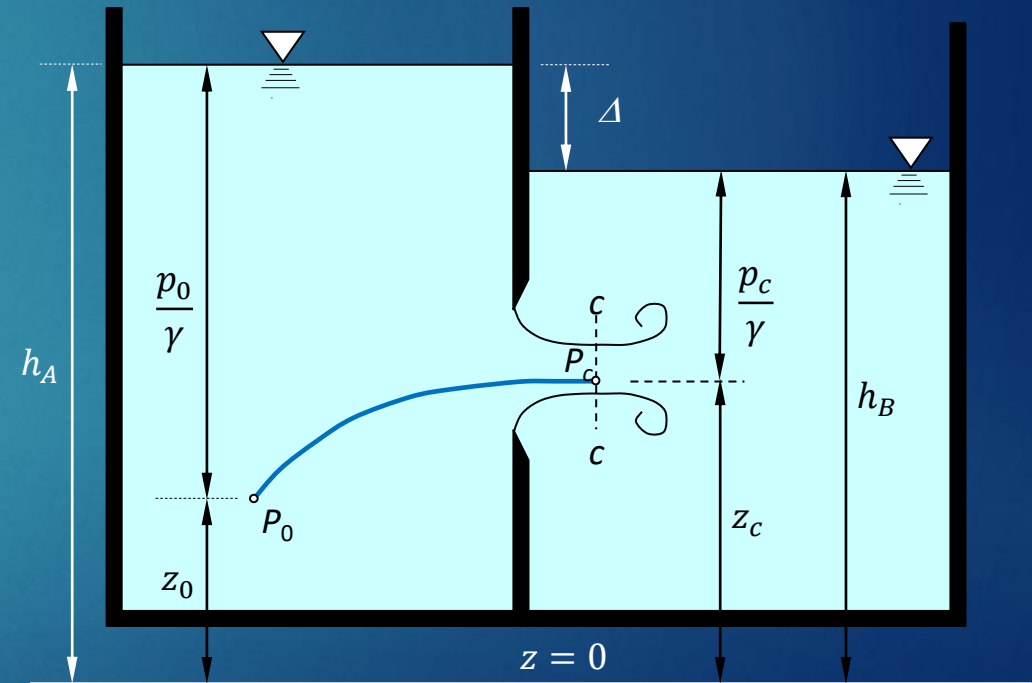
$$u_c \cong \sqrt{2g(h_A - h_B)} = \sqrt{2g\Delta} = \text{cost}$$

$$Q = \int_{\Omega_c} C_v u_c d\Omega = C_v u_c \Omega_c = C_v C_c \Omega \sqrt{2g\Delta} = \mu \sqrt{2g\Delta} \Omega$$

✓  $C_v = 0,98$

✓  $C_c = 0,61 \quad (\Delta \alpha = 90^\circ)$

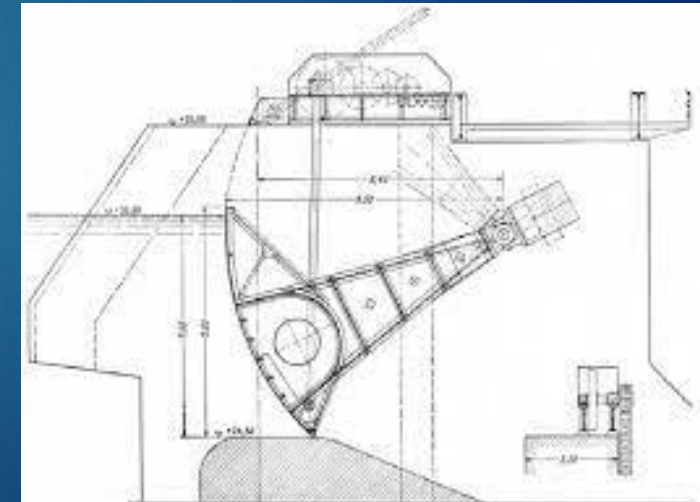
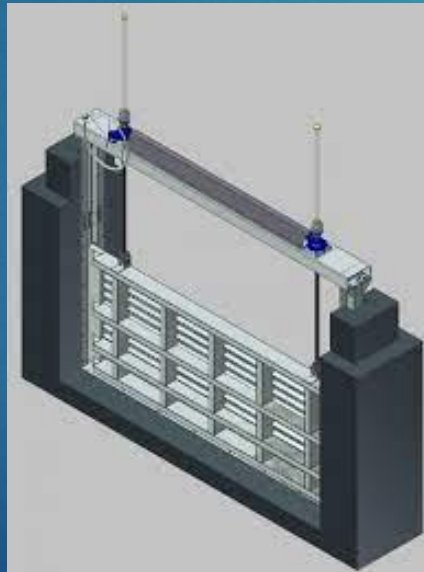
✓  $\mu = C_c C_v = 0,6$



# Paratoie

## ► Organi mobili di regolazione della portata

- Paratoie piane
  - diaframma piano
  - scorrevole entro guide (gargami)
- Paratoie a settore
  - diaframma cilindrico a sezione di arco di cerchio
  - Rotante attorno a un asse collegato alla paratoia mediante carpenteria metallica



# Paratoia piana in parete sottile

- Paratoia piana: lastra piana scorrevole
  - Paratoia verticale
  - Fondale piano (si trascura pendenza su breve tratto)
  - sezione contratta c-c regolare:  $h_c = \text{cost} = a_c$
  - legge di Bernoulli

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

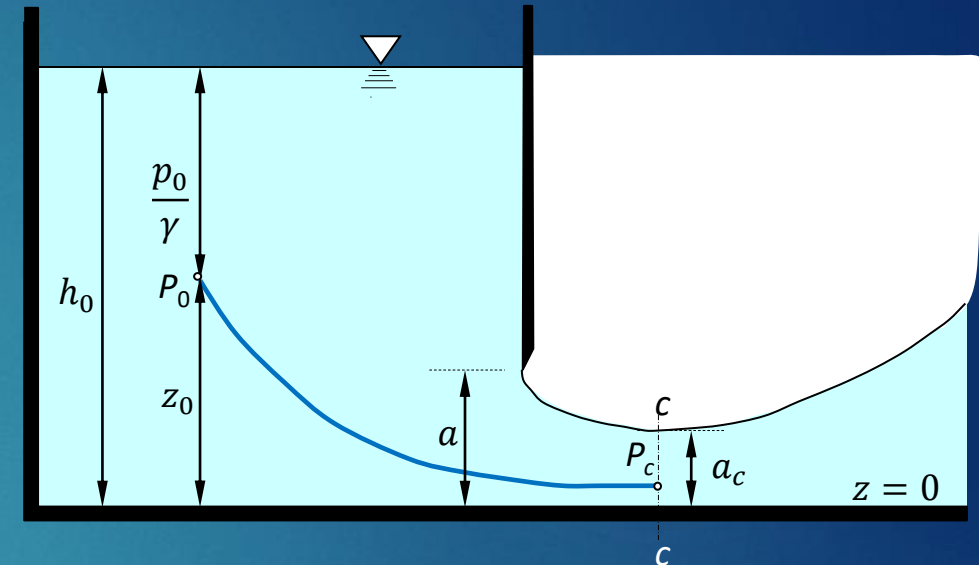
$$\frac{u_0^2}{2g} \cong 0 ; z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = \text{cost} = h_0 ; z_c + \frac{p_c}{\gamma} = \text{cost} = a_c$$

$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - a_c)} = \text{cost}$$

$$Q = C_v u_c \Omega_c = C_v C_c a b \sqrt{2g(h_0 - a_c)} = \mu a b \sqrt{2g(h_0 - a_c)}$$

$$\checkmark C_v = 0,98 ; C_c = a_c/a = 0,61 (\Delta\alpha = 90^\circ) ; \mu = C_c C_v = 0,6$$

$$Q = \mu a b \sqrt{2g(h_0 - a C_c)}$$



- Velocità di arrivo non trascurabile

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

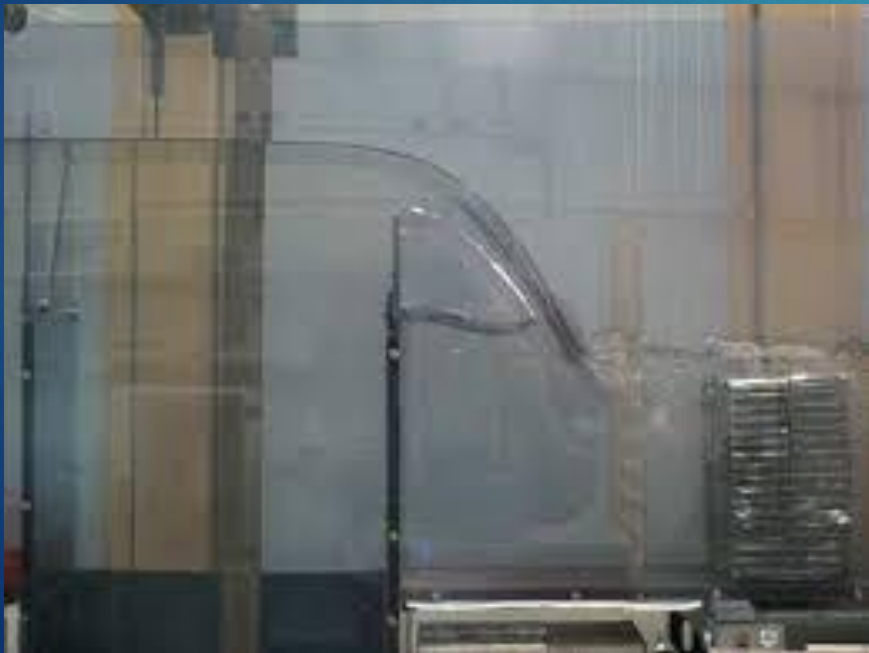
$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g(bh_0)^2} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gC_v^2(baC_c)^2}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g(h_0 - a C_c)}{\frac{1}{(\mu a b)^2} - \frac{1}{(bh_0)^2}}} = b \sqrt{\frac{2g(h_0 - a C_c)}{\frac{1}{(\mu a)^2} - \frac{1}{h_0^2}}}$$



# Stramazzi

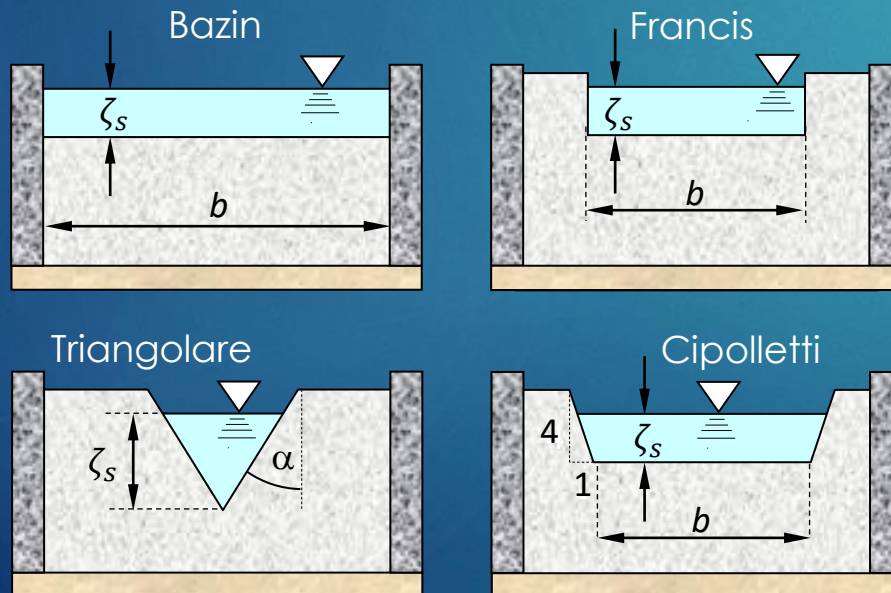
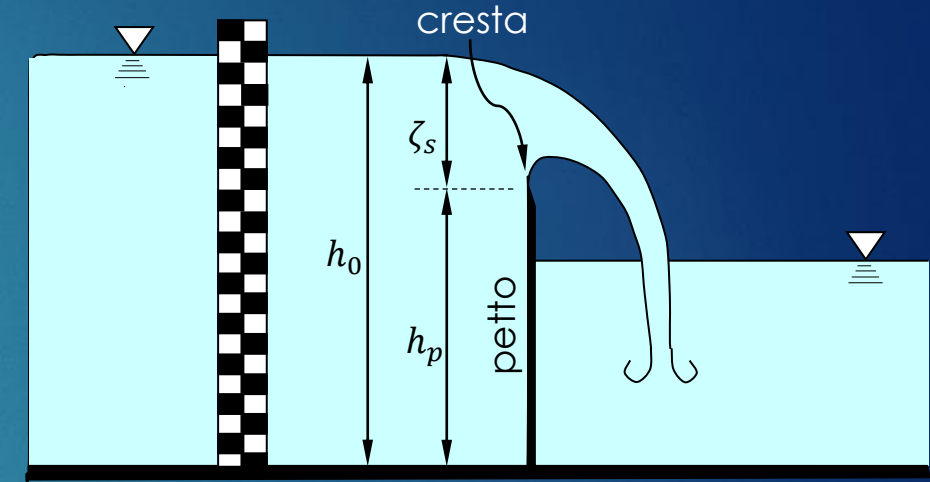
- ▶ Stramazzo: manufatto per la misura delle portate  
barriera trasversale all'asse del canale (petto) tracimata in  
sommità (cresta)
  - Stramazzi in parete sottile (a spigolo vivo): distacco di vena
  - Stramazzi a larga soglia: la vena si adagia sulla cresta





# Stramazzi in parete sottile

- Stramazzo: manufatto per la misura delle portate  
barriera trasversale all'asse del canale (petto) tracimata in sommità (cresta)
- Stramazzi in parete sottile (a spigolo vivo): distacco di vena
- Stramazzi a larga soglia: la vena si adagia sulla cresta
- Stramazzi in parete sottile



## ► Stramazzo Bazin

Cresta sfiorante di larghezza  $b$  pari alla larghezza del canale

- Legge di efflusso: luce in parete sottile verticale per  $\zeta_1 = 0$

$$Q = \mu b \sqrt{2g} (\zeta_2^{3/2} - \zeta_1^{3/2}) \longrightarrow Q = \mu b \sqrt{2g} \zeta_s^{3/2}$$

$$Q = \mu b \zeta_s \sqrt{2g \zeta_s} = \mu \Omega u_T$$

✓  $\mu = \frac{2}{3} C_c C_v = 0,4$  (0,415 da misure sperimentali, velocità di arrivo trascurabile)

# Stramazzi in parete sottile

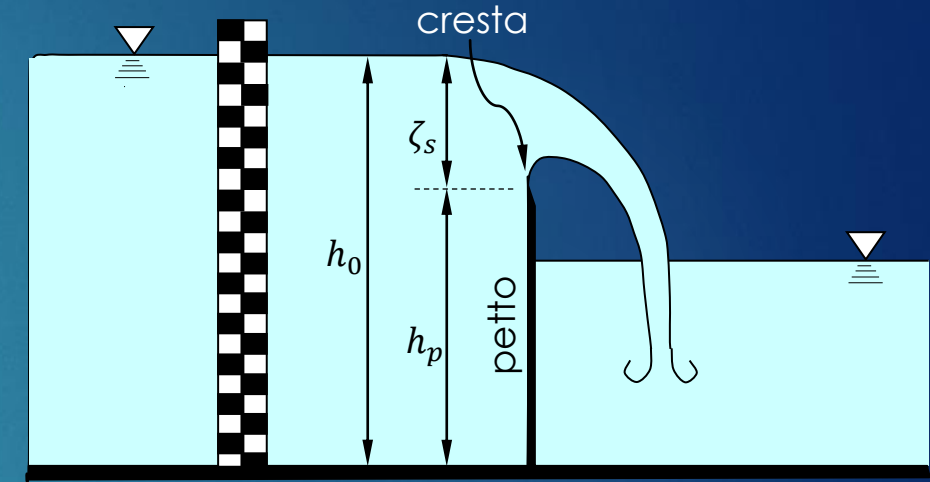
## ► Stramazzo Bazin

- Formula di Rehbock
  - ✓ tiene conto implicitamente della velocità di arrivo

$$\zeta_e = \zeta_s + 0,0011 \text{ (m)} \quad \text{carico efficace}$$

- ✓ effetto tensione superficiale

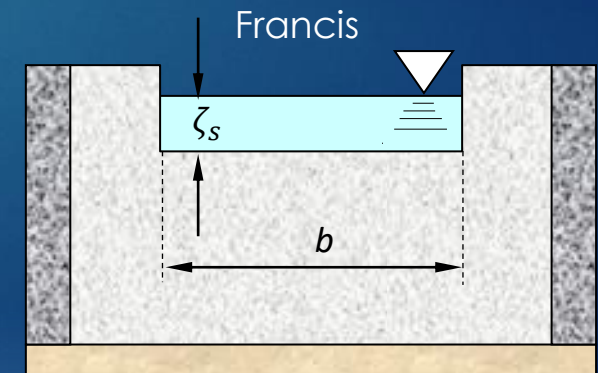
$$Q = \mu_R \sqrt{2g} \zeta_e^{3/2} \quad \mu_R = 0,402 + 0,054 \frac{\zeta_e}{h_p}$$



## ► Stramazzo Francis (a contrazione laterale): cresta sfiorante di larghezza inferiore a larghezza del canale.

- ✓ Utilizzabile in canali di forma diversa dalla rettangolare
- ✓ La vena sfiorante si contrae anche in direzione orizzontale
- Legge di efflusso: legge dello stramazzo Bazin con larghezza diminuita per tener conto della contrazione della vena

$$Q = \mu (b - 0,2 \zeta_s) \sqrt{2g} \zeta_s^{3/2} \quad \mu = 0,415 \text{ (da misure sperimentali, velocità di arrivo trascurabile)}$$



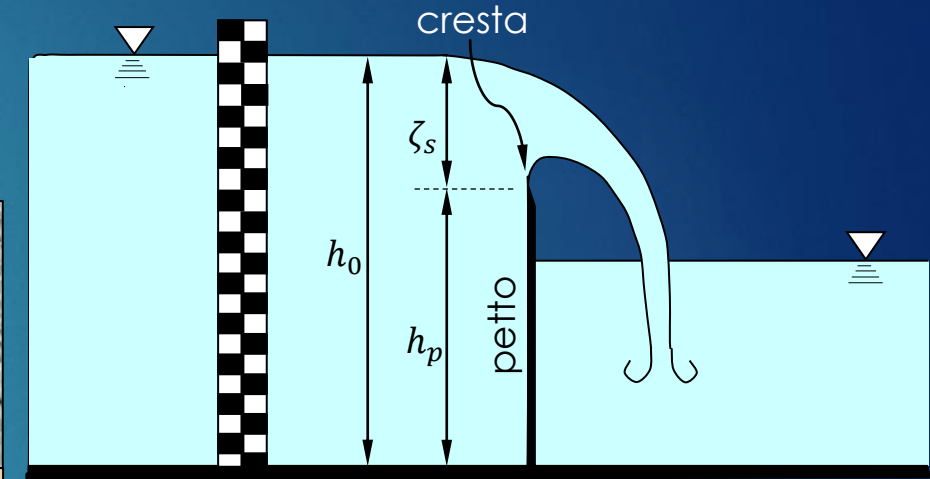
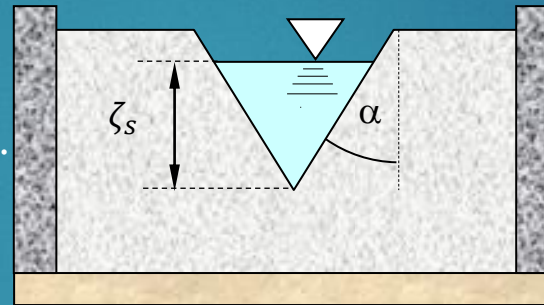
# Stramazzi in parete sottile

## ► Stramazzo triangolare

- ✓ Per misure di piccole portate (p.es. in laboratorio)

$$Q = \frac{8}{15} \mu \tan \alpha \sqrt{2g} \zeta_s^{5/2}$$

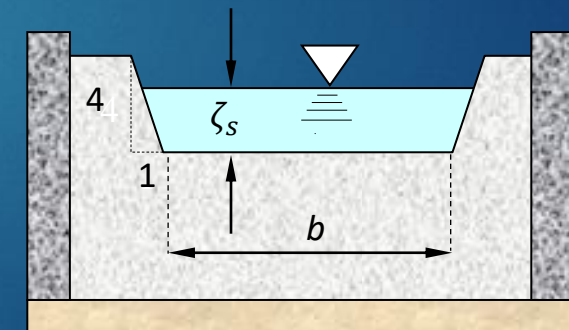
- ✓  $\mu = 0,62 \div 0,64$  da misure speriment.
- ✓ Stramazzo Thomson:  $\alpha = 45^\circ$



## ► Stramazzo Cipolletti

cresta sfiorante trapezoidale, con profili laterali a pendenza 4:1

- ✓ Utilizzabile in canali di forma diversa dalla rettangolare
- ✓ L'allargamento della lama sfiorante al crescere del carico compensa l'effetto della contrazione laterale
- Legge di efflusso (stramazzo Bazin di larghezza  $b$ )



$$Q = \mu b \sqrt{2g} \zeta_s^{3/2} \quad \mu = 0,415 \text{ (da misure sperimentali, per velocità di arrivo trascurabili)}$$





# Transitori

- Processi di moto vario (svuotamenti o riempimenti di serbatoi)
  - Transitori abbastanza lenti possono essere rappresentati:
    - come una successione di moti stazionari
    - Utilizzando leggi di efflusso ricavate per moti stazionari
    - ✓ Moto lento se  $\Omega \ll \Sigma$  ( $\Sigma$  = sezione trasversale del serbatoio)

- Equazioni che reggono il processo (incognite  $Q(t), \zeta(t)$ , vedi figura )

$$Q = Q(\zeta) \quad \text{legge di efflusso (p.es.: } Q = \mu \sqrt{2 g \zeta_G} \Omega \text{)}$$

$$Q dt = -\Sigma d\zeta \quad \text{eq. di continuità} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{\Sigma(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta_i$$

- Soluzione numerica (equazioni non integrabili analiticamente)

$$\Delta t_i = -\frac{\Sigma(\zeta_{m_i})}{Q(\zeta_{m_i})} \Delta \zeta \quad ; \quad \Delta \zeta = \frac{\zeta_0 - \zeta_N}{N} \quad ; \quad \zeta_{m_i} = \frac{\zeta_i + \zeta_{i-1}}{2} \quad ; \quad \zeta_i = \zeta_0 - i \Delta \zeta$$

$$T_{0-N} = \sum_{i=1}^N \Delta t_i$$

